Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

Ahmed Moussaid

Deuxième Année Cycle Préparatoire
Semestre : S3
Module : Analyse 3

# TD: Fonctions de Plusieurs Variables: Limites et Continuités

December 16, 2020

# Plan

# Solution Ex 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de trois façons :

1. d'après la définition,
2. d'après le théorème de pincement,
3. en utilisant les coordonnées polaires.

# Solution Ex 4

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$$

On Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de trois façons :

1°) d'après la dèfinition de la limite:

# Solution Ex 4

1°) d'après la définition de la limite:
Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\eta > 0$ tel que

$$|\sqrt{x^2+y^2}| \leq \eta \Rightarrow |\frac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0| \leq \varepsilon$$

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

$$x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow |\frac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0| \leq \frac{6x^2|y|}{x^2} = 6|y| \leq 6\sqrt{x^2+y^2}$$

il suffit de donner $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$
Donc

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists \eta = \frac{\varepsilon}{6} \quad \|(x,y)-(0,0)\|_2 \leq \eta \Rightarrow |f(x,y) - 0| \leq \varepsilon$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

# Solution Ex 4

2°) d'aprés le théoréme de Majoration
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ on a

$$0 \leq |\frac{6x^2y}{x^2+y^2}| \leq 6|y| \to 0 \quad \text{quand}(x, y) \mapsto (0, 0)$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

# Solution Ex 4

3°) en utilisant les coordonnées polaires.

Soit $f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ on obtient:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} 6r\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

Or

$$0 \leq |6r\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \leq 6r \underset{r\to 0}{\to} 0$$

donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

# Solution Ex 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie par:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$.

# Exercice 5

On a la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de $f$ au point $(0;0)$

# Solution Ex 5

poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$f(r,\theta) = r(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))$$

comme

$$0 \leq |f(r,\theta)| = |r(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))| \leq \underset{r\to 0}{2r\to 0}$$

indépendamment de $\theta$
ce qui montre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

i.e. que $f$ est continue en point $(0,0)$
De plus elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

# Solution Ex 6

Etudiez la continuitée sur $\mathbb{R}^3$ de la fonction suivante :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^3z^3}{x^4+y^6+z^8} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

# Solution Ex 6

On a la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^3z^3}{x^4+y^6+z^8} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

D'aprés les théorèmes généraux sur la composition de fonctions continues, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$.
Il reste à regarder si elle est continue en $(0,0,0)$

# Solution Ex 6

En prenant les majorants suivants :

$$|x| \leq (x^4 + y^6 + z^8)^{\frac{1}{4}}$$

$$|y| \leq (x^4 + y^6 + z^8)^{\frac{1}{6}}$$

$$|z| \leq (x^4 + y^6 + z^8)^{\frac{1}{8}}$$

donc

$$0 \leq |f(x, y, z)| \leq \frac{(x^4 + y^6 + z^8)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{6}+\frac{3}{8}}}{(x^4 + y^6 + z^8)} = (x^4+y^6+z^8)^{\frac{1}{8}} \underset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$$

alors

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = 0 = f(0, 0, 0)$$

Ainsi, $f$ est bien continue sur tout $\mathbb{R}^3$

# Solution Ex 7

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

est-elle prolongeable par continuité au point $(0,0)$.

# Solution Ex 7

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

On utilise les coordonnées polaires pour calculer la limite de $f$ au point $(0;0)$
poson: $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ alors:

$$f(r,\theta) = r\cos^2(\theta)$$

comme

$$0 \leq |f(r,\theta)| = |r\cos^2(\theta)| \leq \begin{matrix} r \to 0 \\ r \to 0 \end{matrix}$$

indépendamment de $\theta$
ce qui montre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

# Solution Ex 7

D'où $f$ admet un prolongement par continuité en point $(0,0)$ définie par :

$$\breve{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Donc $\breve{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.